Kapitola 2

ZÁKLADNÍ ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

V této kapitole se budeme zabývat studiem funkcí, se kterými se v aplikacích setkáváme nejčastěji. Většinu z nich znáte ze střední školy (např. mocninnou funkci, goniometrické funkce), ale některé budou pro Vás nové (např. cyklometrické funkce). Všechny tyto funkce, které si podrobně popíšeme, budeme nazývat **základní elementární funkce**.
Pomocí algebraických operací sečítání, odečítání, násobení, dělení, umocňování a pomocí skládání je možné ze základních elementárních funkcí vytvářet funkce nové (např. kvadratickou funkci). Všechny takto vytvořené funkce budeme nazývat **elementární funkce**.
V první kapitole jsme zjistili, že pro představu o průběhu funkce a o jejích vlastnostech je užitečné znát grafické vyjádření funkce. Proto se budeme podrobně zabývat také grafy elementárních funkcí a vyšetřováním jejich definičních oborů.

2.1 Konstantní funkce

Konstantní funkce

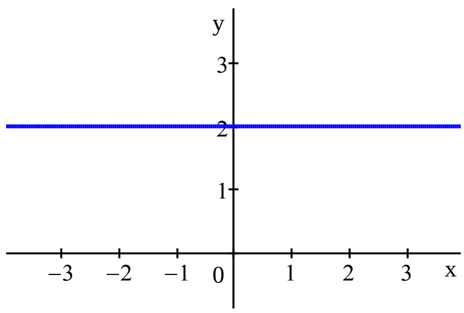
Definice 2.1.: Konstantní funkcí nazýváme funkci $y = c$, kde $c \in \mathbf{R}$.

Definičním oborem konstantní funkce je množina všech reálných čísel, oborem funkčních hodnot je jednoprvková množina $\{c\}$.

Grafem konstantní funkce $y = c$ je přímka rovnoběžná s osou *x*, procházející na ose *y* bodem $[0, c]$.

Příklad konstantní funkce

Vlastnosti konstantní funkce $y = 2$ jsou patrné z jejího grafu:



Tedy definičním oborem jsou všechna reálná čísla, oborem hodnot množina $\{2\}$, funkce je sudá, ale není prostá.
Periodou konstantní funkce $y = c$ je libovolné reálné číslo $p > 0$.

2.2 Obecná mocnina

Obecná mocnina

Definice 2.2.: Obecnou mocninnou funkcí nazýváme funkci $y = x^n$, kde $n \in \mathbf{R}$ a $x \in (0,\infty)$.

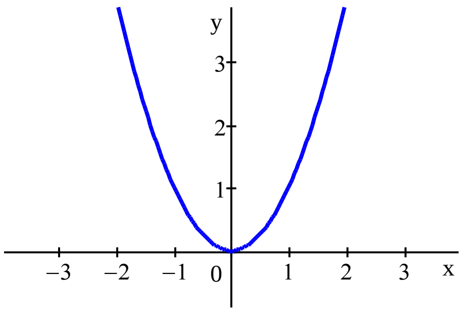
Jak bude vidět z následujících příkladů, závisí definiční obor, obor funkčních hodnot a vlastnosti obecné mocninné funkce na hodnotě exponentu *n*.

U některých mocninných funkcí (např. $y = x^2$ nebo $y = x^{-1}$) lze rozšířit definiční obor o záporná čísla, případně o nulu.

Příklady mocninných funkcí

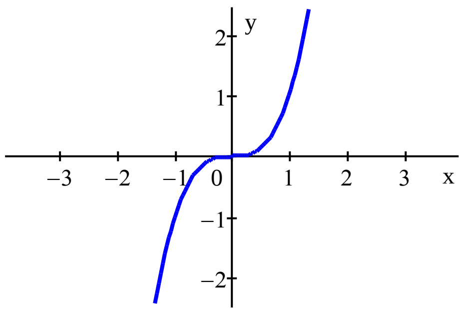
Grafy následujících nejdůležitějších obecných mocninných funkcí je potřeba naučit se znát zpaměti, protože pomocí nich snadno určíme jejich vlastnosti. Např. z grafu funkce $y = x^2$, kterým je parabola (viz obrázek), je zřejmé, že je to funkce sudá, ohraničená zdola, ale není monotónní, periodická ani prostá.

1. $y = x^2$



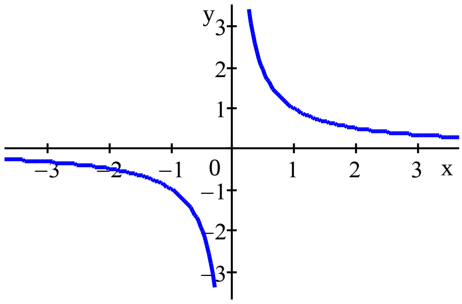
$$D(x^2) = \mathbf{R},\ H(x^2) = \langle 0,\infty)$$

2. $y = x^3$



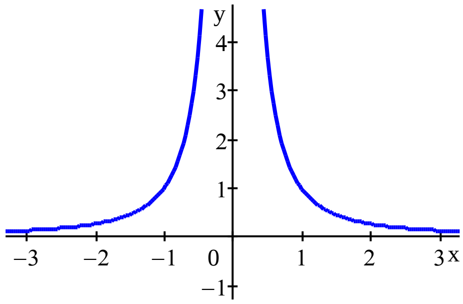
$$D(x^3) = \mathbf{R},\ H(x^3) = \mathbf{R}$$

3. $y = \dfrac{1}{x}$



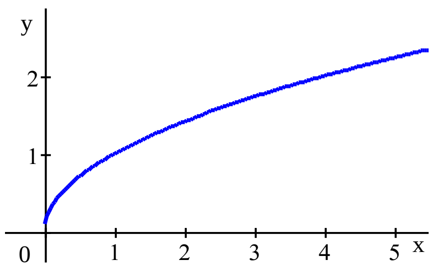
$$D\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbf{R}/\{0\},\ H\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbf{R}/\{0\}$$

4. $y = \dfrac{1}{x^2}$



$$D\left(\frac{1}{x^2}\right) = \mathbf{R}/\{0\},\ H\left(\frac{1}{x^2}\right) = (0,\infty)$$

5. $y = \sqrt{x}$



$$D(\sqrt{x}) = \langle 0,\infty),\ H(\sqrt{x}) = \langle 0,\infty)$$

Poznámka: Pro obecnou mocninnou funkci $y=\sqrt[n]{x}$, kde *n* je liché číslo, rozšiřujeme definiční obor i o záporná čísla.
Definujeme totiž $\sqrt[n]{-x}:=-\sqrt[n]{x}$ (tedy např. $\sqrt[3]{-8}:=-\sqrt[3]{8}=-2$).

2.3 Goniometrické funkce

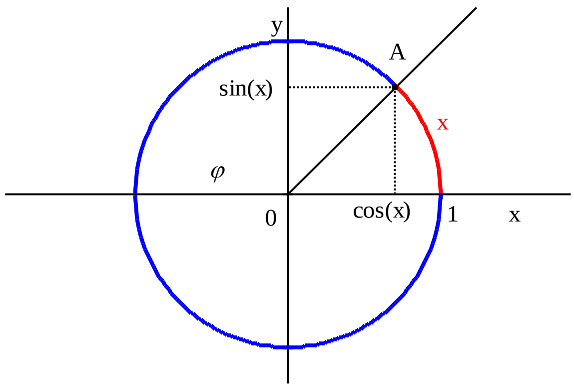
Velikost úhlu se v praxi vyjadřuje ve stupních, kdy přímému úhlu odpovídá hodnota 180° (pravému úhlu 90° a plnému úhlu 360°). V teorii se používá oblouková míra, jejíž jednotkou je radián. Pro převod velikosti úhlu α v radiánech a ve stupních platí vztah $\alpha \text{ rad} = \frac{\pi}{180}\alpha°$.

Tedy $\pi = 180°,\ 2\pi = 360°,\ \frac{\pi}{2} = 90°,\ \frac{\pi}{3} = 60°,\ \frac{\pi}{4} = 45°,\ \frac{\pi}{6} = 60°.$

Goniometrické funkce se definují buď pomocí jednotkové kružnice nebo (pro ostré úhly) pomocí pravoúhlého trojúhelníka.

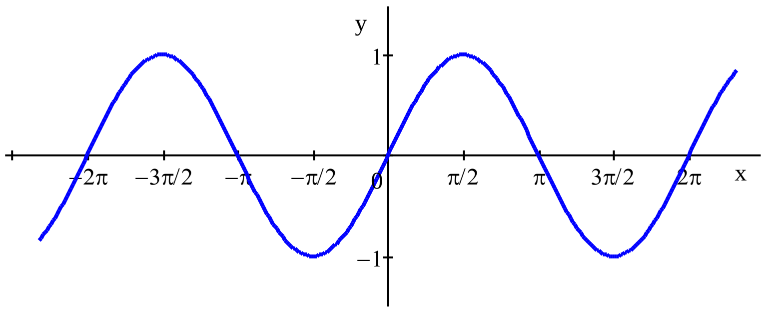
Funkce sinus a kosinus

Definice 2.3.: Mějme jednotkovou kružnici (tj. poloměr $r=1$) se středem v počátku. Dále mějme polopřímku svírající s kladným směrem osy *x* úhel φ stupňů (odpovídá mu na jednotkové kružnici oblouk délky *x*). Označme *A* průsečík této polopřímky a kružnice. Potom
a) první souřadnici bodu *A* označíme $\cos x$, tímto způsobem je definovaná funkce $y=\cos x$,
b) druhou souřadnici bodu *A* označíme $\sin x$, tímto způsobem je definovaná funkce $y=\sin x$.



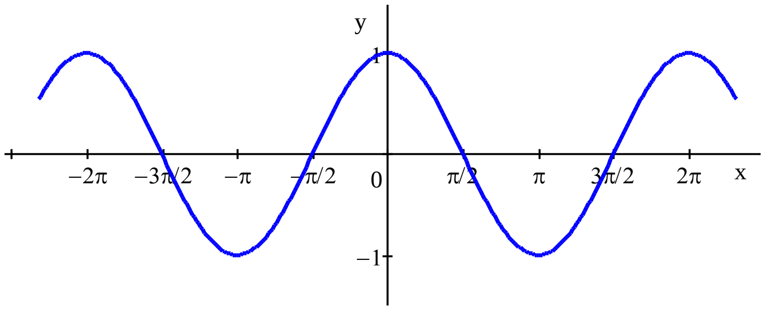
Grafy a vlastnosti funkcí $y=\sin x$ a $y=\cos x$

a) $y=\sin x$



Funkce $\sin x$ je definovaná pro všechna $x\in\mathbf{R}$ a nabývá hodnoty z intervalu $\langle -1,1\rangle$.
Je to funkce lichá, ohraničená, není prostá ani monotónní a je periodická s periodou 2π.

b) $y = \cos x$



Funkce $\cos x$ je definovaná pro všechna $x \in \mathbf{R}$ a nabývá hodnoty z intervalu $\langle -1,1 \rangle$.
Je to funkce sudá, ohraničená, není prostá ani monotónní a je periodická s periodou 2π.

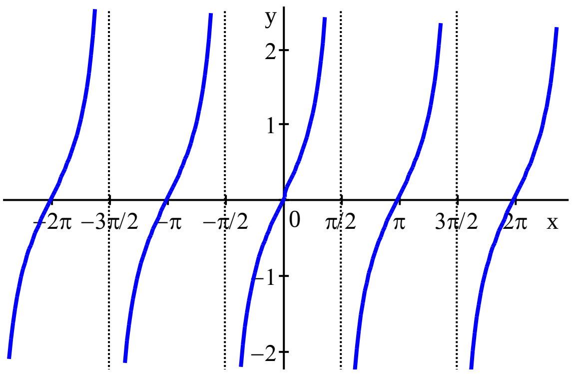
Funkce tangens a kotangens

Definice 2.4.: Funkce $\mathrm{tg}x$ je definovaná vztahem $\mathrm{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, pro $\cos x \neq 0$.

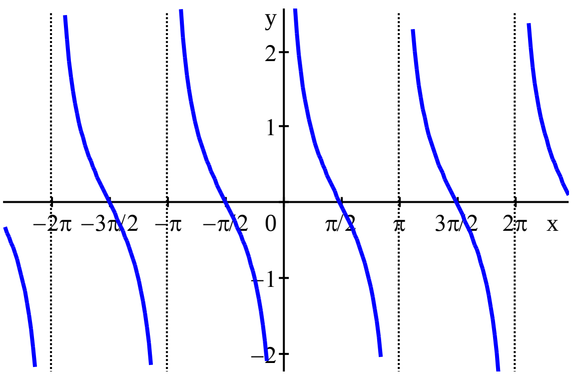
Funkce $\mathrm{cotg}x$ je definovaná vztahem $\mathrm{cotg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, pro $\sin x \neq 0$.

Grafy a vlastnosti funkcí $y = \mathrm{tg}x$ **a** $y = \mathrm{cotg}x$

a) $y = \mathrm{tg}x$



b) $y = \mathrm{cotg}x$



Funkce $\mathrm{tg}x$ je definovaná pro všechna $x \neq (2k+1)\cdot\dfrac{\pi}{2}$, kdežto funkce $\mathrm{cotg}x$ je definovaná pro všechna $x \neq k\pi$, kde k je celé číslo. Oborem funkčních hodnot obou funkcí jsou všechna reálná čísla.
Jsou to periodické funkce s periodou π. Obě funkce jsou liché, nejsou prosté, ohraničené ani monotónní.

2.4 Exponenciální funkce, graf funkce

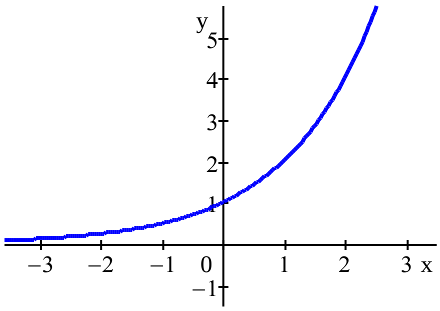
Exponenciální funkce

Definice 2.5.: Obecnou exponenciální funkcí nazýváme funkci $y = a^x$, kde $a \in \mathbf{R}$, $0 < a \neq 1$ a $x \in \mathbf{R}$. Číslo a se nazývá základ exponenciální funkce.

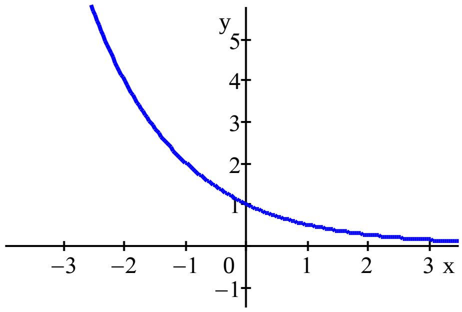
Pro $a = 1$ by se jednalo o konstantní funkci, proto tuto hodnotu vylučujeme.
Oborem funkčních hodnot exponenciální funkce jsou kladná reálná čísla.
Pro základ $a > 1$ je exponenciální funkce rostoucí, pro $a \in (0,1)$ klesající.
Jde o funkci prostou, ryze monotónní, ohraničenou zdola a neperiodickou.
Graf exponenciální funkce $y = a^x$ prochází vždy body $[0, 1]$ a $[1, a]$.

Příklady grafů exponenciálních funkcí

$f_1 : y = 2^x$



$f_2 : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Poznámka: Zvláštní význam má exponenciální funkce, jejíž základ je tzv. Eulerovo číslo $e \cong 2{,}71$. Nazýváme ji přirozenou exponenciální funkcí a píšeme $y = e^x$.

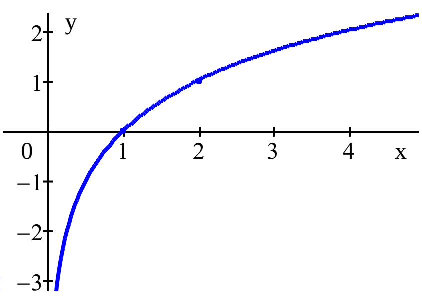
2.5 Logaritmická funkce

Logaritmická funkce

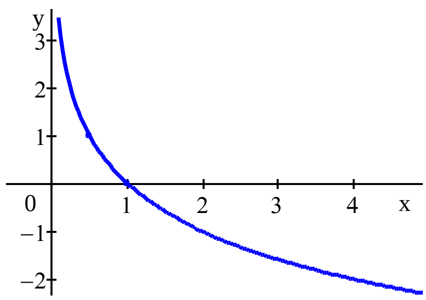
Definice 2.6.: Obecná logaritmická funkce $y = \log_a x$ o základu a ($a \in \mathbf{R}$, $0 < a \neq 1$) přiřazuje každému číslu $x > 0$ takovou hodnotu y, pro kterou platí $x = a^y$.

Oborem funkčních hodnot logaritmické funkce jsou všechna reálná čísla. Pro základ $a > 1$ je logaritmická funkce rostoucí, pro $a \in (0,1)$ je logaritmická funkce klesající.
Jde o funkci prostou, ryze monotónní, neperiodickou a neohraničenou.
Logaritmické funkce jsou inverzní k funkcím exponenciálním.
Graf logaritmické funkce $y = \log_a x$ prochází vždy body $[1, 0]$ a $[a, 1]$.

Příklady grafů logaritmických funkcí



$y = \log_2 x$ **:**



$y = \log_{0,5} x$ **:**

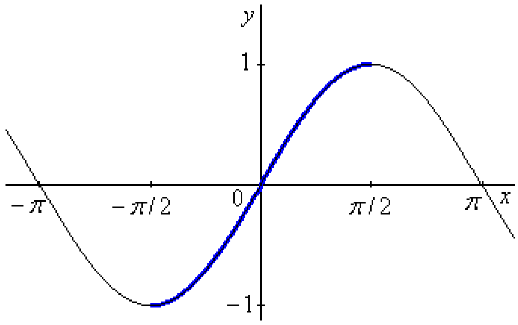
Poznámka: Pro dvě konkrétní hodnoty základu *a* se zavádí speciální označení :
Pokud $a = e \cong 2{,}71$, mluvíme o přirozené logaritmické funkci a značíme ji $y = \ln x$.
Pokud $a = 10$, mluvíme o dekadické logaritmické funkci a značíme ji $y = \log x$.

2.6 Cyklometrické funkce

Jsou to funkce inverzní k funkcím goniometrickým. Vzhledem k tomu, že goniometrické funkce nejsou ve svém definičním oboru prosté, omezíme se jen na interval, kde jednotlivé goniometrické funkce prosté budou.

1) $y = \arcsin x$

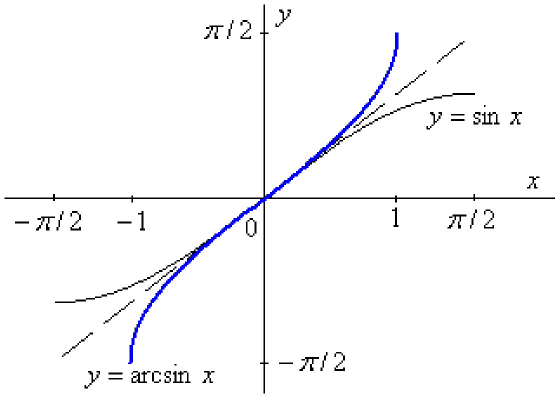
Funkce $y = \sin x$ je prostá v intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a zobrazuje ho na interval $\langle -1,1 \rangle$.



Funkce arkus sinus

Definice 2.7.: Funkce $y = \arcsin x$ (čteme arkus sinus) přiřazuje každému číslu $x \in \langle -1,1 \rangle$ takové číslo $y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, pro které platí $x = \sin y$.

Některé funkční hodnoty: $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$.
Určujeme-li funkční hodnotu např. funkce $y = \arcsin x$ v bodě $x = 1$, ptáme se otázkou: sinus kterého úhlu je 1? Odpověď je $\frac{\pi}{2}$. Proto $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.



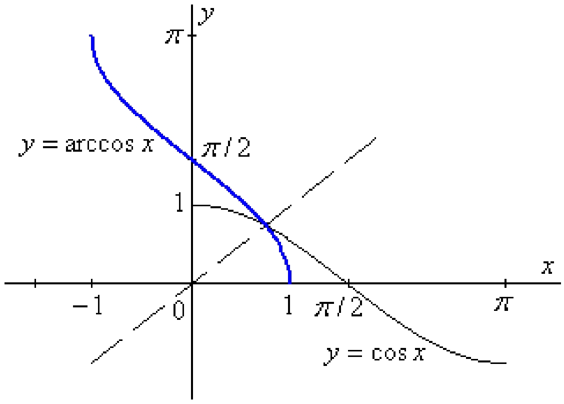
2) $y = \arccos x$

Funkce $y = \cos x$ je prostá v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ a zobrazuje ho na interval $\langle -1,1 \rangle$.

Funkce arkus kosinus

Definice 2.8.: Funkce $y = \arccos x$ přiřazuje každému číslu $x \in \langle -1,1 \rangle$ takové číslo $y \in \langle 0, \pi \rangle$, pro které platí $x = \cos y$.

Některé funkční hodnoty: $\arccos(1) = 0$, $\arcsin(0) = \dfrac{\pi}{2}$.



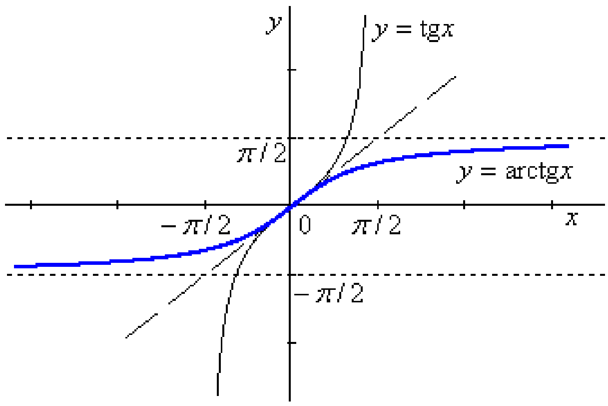
3) $y = \mathrm{arctg}x$

Funkce $y = \mathrm{tg}x$ je prostá v intervalu $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ a zobrazuje ho na interval $(-\infty, \infty)$.

Funkce arkus tangens

Definice 2.9.: Funkce $y = \mathrm{arctg}x$ přiřazuje každému $x \in (-\infty, \infty)$ takové číslo $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, pro které platí $x = \mathrm{tg}y$.

Některé funkční hodnoty: $\mathrm{arctg}(0) = 0$, $\mathrm{arctg}(1) = \dfrac{\pi}{4}$.



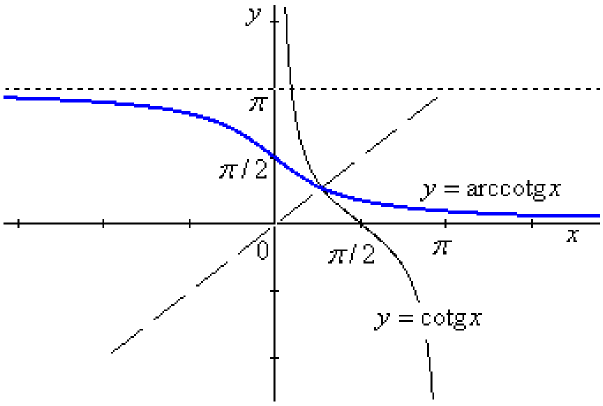
4) $y = \mathrm{arccotg}x$

Funkce $y = \mathrm{cotg}x$ je prostá v intervalu $(0, \pi)$ a zobrazuje ho na interval $(-\infty, \infty)$.

Funkce arkus kotangens

Definice 2.10.: Funkce $y = \mathrm{arccotg}x$ přiřazuje každému $x \in (-\infty, \infty)$ takové číslo $y \in (0, \pi)$, pro které platí $x = \mathrm{cotg}y$.

Některé funkční hodnoty: $\operatorname{arccotg}(0) = \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{arccotg}(1) = \dfrac{\pi}{4}$.



Úlohy 2.6.

1. K daným funkcím určete funkce inverzní a jejich definiční obor:

a) $f : y = 2\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right),\ x \in (0, \pi)$,

b) $g : y = 3 - 2\arccos x,\ x \in \langle -1, 1\rangle$.

Výsledky úloh 2.6.

a) $f^{-1} : y = \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2},\ D\left(f^{-1}\right) = \mathbf{R}$,

b) $g^{-1} : y = \cos\dfrac{3-x}{2},\ D\left(g^{-1}\right) = \langle 3 - 2\pi, 3\rangle$.

2.7 Lineární a kvadratické funkce

Jak bylo uvedeno na začátku kapitoly, pomocí algebraických operací sečítání, odečítání, násobení, dělení, umocňování a pomocí skládání základních elementárních funkcí je možné z těchto funkcí vytvářet funkce nové. Nejjednodušší z nich jsou lineární a kvadratické funkce, které znáte ze střední školy. V tomto odstavci budou popsány základní vlastnosti těchto dvou funkcí a připomeneme si také řešení lineárních a kvadratických nerovnic.

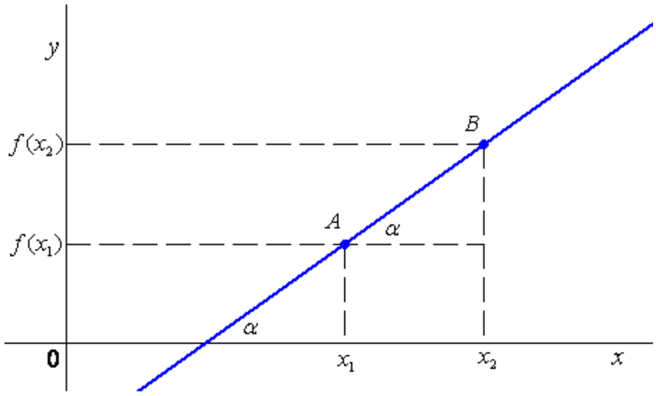
Lineární funkce

Definice 2.11.: Lineární funkcí nazýváme funkci $y = ax + b$, definovanou pro $x \in \mathbf{R}$, kde $a, b \in \mathbf{R}$.

Jde o součet mocninné funkce $y_1 = ax$ násobené číslem a a konstantní funkce $y_2 = b$. Tedy $y = y_1 + y_2 = ax + b$.

Grafem lineární funkce je přímka.

Poznámka: Číslo a nazýváme směrnicí přímky. Jsou-li $A = [x_1, f(x_1)]$ a $B = [x_2, f(x_2)]$ dva různé body přímky $y = ax + b$, je směrnice dána vztahem $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Je to podíl přírůstku funkce a přírůstku proměnné, tedy tangens úhlu α, který svírá přímka s kladnou částí osy *x*.



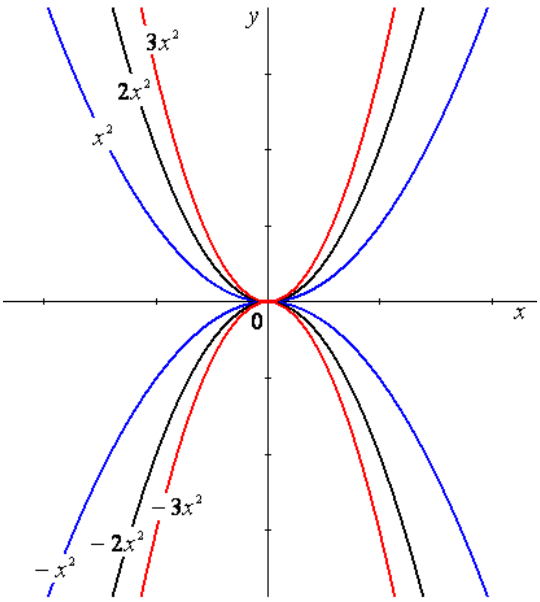
Kvadratická funkce

Definice 2.12.: Kvadratickou funkcí nazýváme funkci $y = ax^2 + bx + c$, definovanou pro $x \in \mathbf{R}$, kde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

Jde o součet dvou mocninných funkcí a konstanty.
Grafem kvadratické funkce je parabola.
Pro $a > 0$ jde o parabolu s osou rovnoběžnou s kladnou částí osy *y* a pro $a < 0$ jde o parabolu s osou rovnoběžnou se zápornou částí osy *y*.

Příklady kvadratické funkce

Grafy kvadratické funkce $y = ax^2$ pro $a = 1, 2, 3, -1, -2, -3$.



Úlohy 2.7.

1. Existuje lineární funkce s definičním oborem **R**, která je sudá?
2. Uvažujte množinu všech kvádrů, jejichž délky hran jsou v poměru 1:3:2. Určete funkci, která vyjadřuje závislost objemu kvádru na délce jeho nejdelší strany.
3. Načrtněte graf takové lineární nebo kvadratické funkce, jejíž definiční obor je interval $\langle -3, 3 \rangle$ a pro níž dále platí: a) je rostoucí, lichá, b) není monotónní, je sudá.

4. Určete kvadratickou funkci $y = ax^2 + bx + c$, pro kterou platí:
$f(0) = 0,\ f(-2) = 4,\ f(3) = 6$.

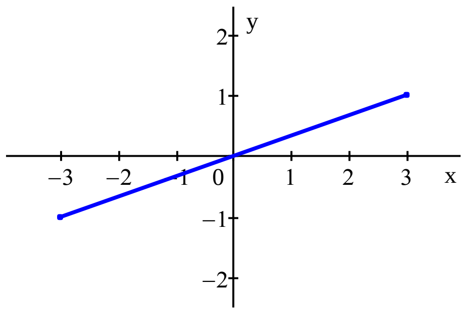
5. Z plíšků tvaru kruhu o průměru 3 cm a tloušťce 2 mm se vyrábějí podložky ve tvaru mezikruží s různými vnitřními poloměry *r*. Určete funkci, která udává závislost objemu *V* (mm^3) podložky na poloměru *r* (mm).

Výsledky úloh 2.7.

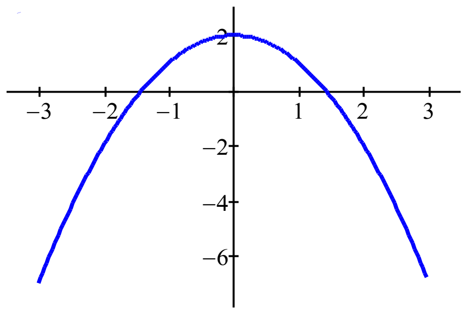
1. ano, např. $y = 2$,

2. $V = \frac{2}{9}b^3$, 4. $y = \frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{5}x$, 5. $V = 450\pi - 2\pi r^2$, $r \in \langle 0, 15)$.

3. Např. a)



b)



Řešení kvadratických rovnice a nerovnic

Při vyšetřování definičních oborů bude často potřeba řešit kvadratické rovnice a nerovnice. Proto jejich řešení připomeňme.

Uvažujme kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$.

Její kořeny vypočítáme pomocí vzorce $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, kde diskriminant $D = b^2 - 4ac$.

Pro

- $D > 0$ dostáváme dva reálné různé kořeny,
- $D = 0$ dostáváme jeden tzv. dvojnásobný reálný kořen,
- $D < 0$ nemá rovnice reálné kořeny (dostáváme dva komplexně sdružené kořeny).

Při řešení kvadratické nerovnice $ax^2 + bx + c \geq 0$ (znaménko nerovnosti může být případně $>, \leq, <$) je možné postupovat několika způsoby.

První způsob – pomocí věty o součinu čísel.

Kvadratický výraz $ax^2 + bx + c$ rozložíme v případě reálných kořenů x_1, x_2 na součin $a(x - x_1)(x - x_2)$ a k určení toho, zda je kladný nebo záporný použijeme větu o znaménku součinu reálných čísel. Podle ní pro libovolná reálná čísla *p*, *q* platí:

1) $p.q > 0 \Leftrightarrow (p > 0 \wedge q > 0) \vee (p < 0 \wedge q < 0)$,

2) $p.q < 0 \Leftrightarrow (p > 0 \wedge q < 0) \vee (p < 0 \wedge q > 0)$.

Podobná věta platí i pro znaménko podílu reálných čísel.

Nemá-li kvadratický výraz $ax^2 + bx + c$ reálné kořeny, je jeho hodnota pro všechna reálná čísla kladná nebo záporná (zjistíme to dosazením hodnoty např. $x = 0$).

Druhý způsob – pomocí grafu.
Vychází z grafu kvadratické funkce.
Kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c$ nabývá nulových hodnot (a její graf protíná osu *x*) v bodech, které vyhovují rovnici $ax^2 + bx + c = 0$.
Mohou tedy nastat tři případy: graf kvadratické funkce protíná osu *x* ve dvou různých bodech, graf se dotýká osy *x*, graf osu *x* neprotíná.
Pomocí grafu tak snadno určíme řešení kvadratické nerovnice $ax^2 + bx + c \geq 0$, případně $ax^2 + bx + c \leq 0$.
Pokud je totiž koeficient $a > 0$, je parabola, jako graf kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$, otevřená směrem nahoru, pro $a < 0$ je parabola otevřená směrem dolů.
První nerovnici pak vyhovují ta čísla *x*, pro která leží graf paraboly nad osou *x*. Druhá nerovnice platí pro ta *x*, pro která leží graf paraboly pod osou *x*.

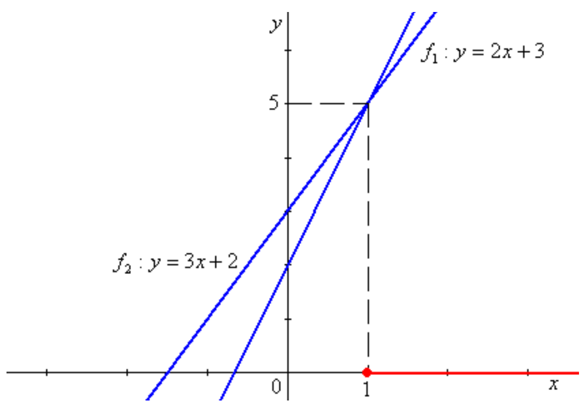
Třetí způsob – pomocí tabulky.
Využívá k určení intervalů, ve kterých nerovnice platí, tabulku.
Pro každý z intervalů, určených reálnými kořeny x_1, x_2 kvadratického výrazu $ax^2 + bx + c$, určíme znaménko kořenových činitelů $(x - x_1)$ a $(x - x_2)$. Závorky intervalů musí odpovídat typu nerovnosti. Na závěr pomocí věty o znaménku součinu reálných čísel určíme, pro které z vytvořených intervalů je výraz $ax^2 + bx + c$ kladný, případně záporný (znaménka $\pm$ nahradíme v konkrétní úloze znaménkem + nebo –).

	$(-\infty; x_1\rangle$	$\langle x_1; x_2\rangle$	$\langle x_2; \infty)$
$(x - x_1)$	$\pm$	$\pm$	$\pm$
$(x - x_2)$	$\pm$	$\pm$	$\pm$
celkem	$\pm$	$\pm$	$\pm$

Příklad 2.1.
Řešte v množině **R** lineární nerovnici $2x + 3 \leq 3x + 2$.
Řešení: Nerovnici lze řešit početně i graficky.
Početní řešení.

$$2x + 3 \leq 3x + 2 \;\Leftrightarrow\; -x \leq -1 \;\Leftrightarrow\; x \geq 1 \;\Leftrightarrow\; x \in \langle 1, \infty).$$

Grafické řešení.
Levou stranu nerovnice označíme $f_1 : y = 2x + 3$ a pravou stranu nerovnice $f_2 : y = 3x + 2$. Vyšetříme, pro která $x \in \mathbf{R}$ je $f_1 \leq f_2$. Z grafu je vidět (případně určíme průsečík přímek), že tomu tak je pro $x \in \langle 1, \infty)$.



Příklad 2.2.

Řešte v množině **R** kvadratické nerovnice: a) $3x^2 - 5x - 2 > 0$, b) $2.(1 - x^2) \leq x - 3$.

Řešení: Nerovnice budeme řešit diskusí, graficky i tabulkou.

a) První způsob.

Kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$, který má kořeny x_1 a x_2, je možné napsat ve tvaru $a.(x - x_1)\cdot(x - x_2)$.

Výraz $3x^2 - 5x - 2$, který má kořeny $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, můžeme tedy rozložit na součin $3.(x-2).\left(x + \frac{1}{3}\right)$.

Dále provedeme diskusi, kdy je součin dvou výrazů kladný:

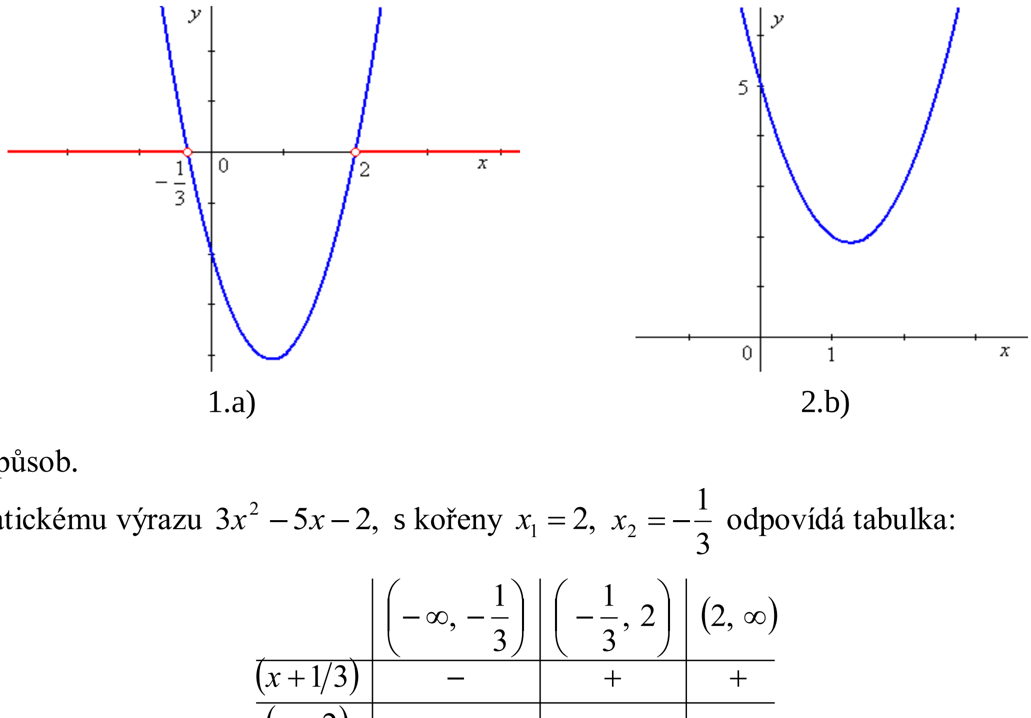
$$3.(x-2).\left(x + \frac{1}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow \left(x - 2 > 0 \wedge x + \frac{1}{3} > 0\right) \vee \left(x - 2 < 0 \wedge x + \frac{1}{3} < 0\right) \Leftrightarrow$$

$(x > 2) \vee \left(x < -\frac{1}{3}\right)$, tedy $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (2, \infty)$.

Druhý způsob.

Vyšetříme, pro která $x \in \mathbf{R}$ je funkce $f : y = 3x^2 - 5x - 2$ kladná. Grafem této funkce je parabola, protínající osu x v bodech $x_1 = 2$ a $x_2 = -\frac{1}{3}$, která je otevřená směrem nahoru.

Z grafu (1.a) je vidět, že funkce je kladná pro $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (2, \infty)$.



Třetí způsob.

Kvadratickému výrazu $3x^2 - 5x - 2$, s kořeny $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ odpovídá tabulka:

	$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$	$(2, \infty)$
$(x + 1/3)$	$-$	$+$	$+$
$(x - 2)$	$-$	$-$	$+$
celkem	$+$	$-$	$+$

Tedy nerovnice platí pro $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (2, \infty)$.

b) První způsob.

Kvadratickou nerovnici $2.(1-x)^2 \leq x-3$ nejprve upravíme na tvar $2x^2 - 5x + 5 \leq 0$.

Z hodnoty diskriminantu (D = 25 – 40 = – 15) vyplývá, že kvadratický trojčlen nelze rozložit v reálném oboru na součin kořenových činitelů. V tom případě je buď $x \in \mathbf{R}$, nebo $x \in \{\ \}$.

Vyhovuje-li nerovnici libovolné reálné číslo, je řešením **R**, nevyhovuje-li nerovnici libovolné reálné číslo, je řešením $\{\ \}$. V našem případě je $x \in \{\ \}$.

Druhý způsob.

Levou stranu upravené nerovnice označíme $f: y = 2x^2 - 5x + 5$. Vyšetříme, pro která $x \in \mathbf{R}$ je funkce $f \leq 0$. Vzhledem k tomu, že diskriminant $D < 0$, neprotíná graf funkce f osu x. Vzhledem k tomu, že jde o parabolu, otevřenou nahoru, je (viz. graf 1.b) řešením nerovnice množina $x \in \{\ \}$.

Třetí způsob.

Kvadratický výraz $2x^2 - 5x + 5$ nemá reálné kořeny, takže tabulka je tvořena pouze jedním sloupcem a jedním řádkem :

	$(-\infty, \infty)$
$2x^2 - 5x + 5$	$+$

Tedy řešením nerovnice je prázdná množina $x \in \{\ \}$.

Příklad 2.3.

Řešte nerovnici $\dfrac{x-3}{x+2} \leq 0$.

Řešení: Také tento typ nerovnic je možné řešit různými způsoby.

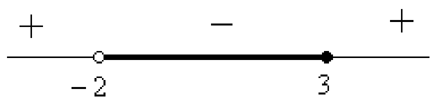
První způsob.

S využitím věty o podílu reálných čísel provedeme diskusi, kdy je zlomek $\dfrac{x-3}{x+2} \leq 0$:

$$\frac{x-3}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow (x-3 \leq 0 \wedge x+2 > 0) \vee (x-3 \geq 0 \wedge x+2 < 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \leq 3 \wedge x > -2) \vee (x \geq 3 \wedge x < -2) \Leftrightarrow x \in (-2, 3\rangle.$$

Druhý způsob.

Určíme nulové body čitatele ($x = 3$) a jmenovatele ($x = -2$). Tyto body rozdělí číselnou osu na tři podintervaly, ve kterých zlomek $\dfrac{x-3}{x+2}$ nemění své znaménko. Jeho hodnotu v těchto intervalech určíme dosazením libovolného čísla, ležícího uvnitř intervalu. V naší úloze dostáváme



Řešením zadané nerovnice je množina čísel $x \in (-2, 3\rangle$.

Popsaný způsob jste asi zapisovali na střední škole podrobněji. Nerovnici $\dfrac{x-3}{x+2} \leq 0$ s nulovými body $x = 3$ a $x = -2$ totiž odpovídá tabulka (vzhledem k tomu, že jmenovatel zlomku musí být různý od nuly, jsou intervaly v krajním bodě $x=-2$ otevřené), kde v posledním řádku jsou znaménka zlomku v jednotlivých intervalech.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,3\rangle$	$\langle 3,\infty)$
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
celkem	$+$	$-$	$+$

Řešením zadané nerovnice je množina čísel $x\in(-2,3\rangle$.

2.8 Vyšetřování definičních oborů funkce

Připomeňme si, že definiční obor byl definován jako množina reálných čísel, pro která má daná funkce smysl. V případě určování definičního oboru konkrétní složené funkce (případně funkce vzniklé algebraickými operacemi složených funkcí) vycházíme z omezení, určených jednotlivými složkami složené funkce (případně jednotlivých složených funkcí). Na závěr určíme průnik získaných intervalů.

Podmínky, které je třeba brát v úvahu při určování definičních oborů :

- Funkce tvaru $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ je definovaná pro $g(x)\neq 0$,
- Funkce tvaru $y=\sqrt{f(x)}$ je definovaná pro $f(x)\geq 0$,
- Funkce tvaru $y=\log_a f(x)$ je definovaná pro $f(x)>0$,
- Funkce tvaru $y=\mathrm{tg}(f(x))$ je definovaná pro $f(x)\neq(2k+1)\cdot\dfrac{\pi}{2}$,
- Funkce tvaru $y=\mathrm{cotg}(f(x))$ je definovaná pro $f(x)\neq k\pi$,
- Funkce tvaru $y=\arcsin(f(x))$ a $y=\arccos(f(x))$ je definovaná pro $-1\leq f(x)\leq 1$.

Příklad 2.4.

Určete definiční obory funkcí: a) $f:y=\dfrac{x^2-3x+1}{\sqrt{2x-5}}$, b) $g:y=\sqrt{x^2-6x+8}+2\arccos\dfrac{x-2}{3}$,

c) $h:y=\dfrac{x}{\ln(3-x)}+\sqrt{\dfrac{x-2}{x+6}}$.

Řešení: a) Z definice odmocniny vyplývá $2x-5\geq 0$ a pro výraz ve jmenovateli zlomku musí platit $\sqrt{2x-5}\neq 0$. Tedy celkem $2x-5>0$. Odtud $D(f)=\left(\dfrac{5}{2},\infty\right)$.

b) Z definice odmocniny vyplývá, že $x^2-6x+8\geq 0$. Řešením kvadratické nerovnice dostaneme $D_1=(-\infty,2\rangle\cup\langle 4,\infty)$.

Současně musí být splněna podmínka $-1\leq\dfrac{x-2}{3}\leq 1$, vyplývající z definice cyklometrické funkce $\arccos x$. Řešením soustavy nerovnic dostaneme $-3\leq x-2\leq 3\Leftrightarrow -1\leq x\leq 5$. Tedy $D_2=\langle -1,5\rangle$.

Definiční obor zadané funkce pak bude průnikem množin D_1 a D_2.

Tedy celkem $D = D_1 \cap D_2 = \langle -1, 2\rangle \cup \langle 4, 5\rangle$.

c) Z podmínky pro zlomek a z definice logaritmické funkce vyplývá

$$\ln(3-x) \neq 0 \wedge (3-x) > 0 \Leftrightarrow (3-x) \neq 1 \wedge 3 > x \Leftrightarrow x \neq 2 \wedge 3 > x.$$

Definičním oborem prvního sčítance je množina $D_1 = (-\infty, 2) \cup (2, 3)$.

Z definice odmocniny vyplývá, že $\dfrac{x-2}{x+6} \geq 0$. Řešením této nerovnosti (viz příklad 1.5.) je množina $D_2 = (-\infty, -6) \cup (2, \infty)$.

Celkem tedy $D = D_1 \cap D_2 = (-\infty, 2) \cup (2, 3)$.

Úlohy 2.8.

1. Určete definiční obor funkce:

a) $y = \ln(x+7) + \sqrt{x^2 + 4x - 5}$, b) $y = \sqrt[3]{x-2} - \arccos \dfrac{x+1}{x}$,

c) $y = \ln(2 + x - x^2) \cdot \sqrt{x+1} + \sin(2x+3)$, d) $y = \ln \dfrac{x-3}{x+2} - 3x \cdot \sqrt{2x+1}$,

e) $y = e^{3x} - \sqrt{\dfrac{7}{2-x}} + \ln(x^2 - 3x - 10)$, f) $y = \dfrac{x}{\ln(2-x)} + \sqrt{12 - 4x - x^2}$,

g) $y = \sqrt{1 - e^{-x}}$, h) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin x}}$,

i) $y = \ln(3 + 2x - x^2) - \dfrac{2x+1}{\sqrt{1-2x}} + \sin \dfrac{1}{x}$, j) $y = \arcsin \dfrac{x^2-2}{2} - \dfrac{x^2}{\ln(x-1)}$.

Výsledky úloh 2.8.

1.a) $(-7, -5\rangle \cup \langle 1, \infty)$, b) $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right\rangle$, c) $(-1, 2)$, d) $(3, \infty)$, e) $(-\infty, -2)$, f) $\langle -6, 1) \cup (1, 2)$,

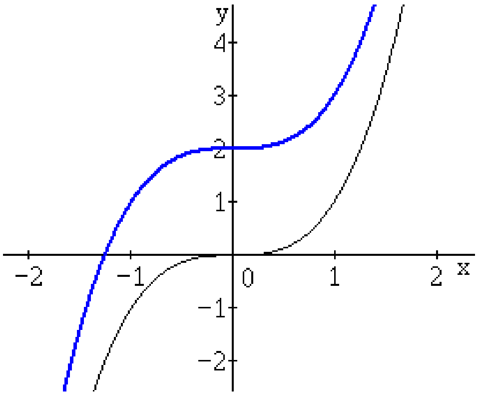
g) $\langle 0, \infty)$, h) $\mathbf{R} / \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$ i) $(-1, 0) \cup \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, j) $(1, 2)$.

2.9 Grafy elementárních funkcí v posunutém tvaru

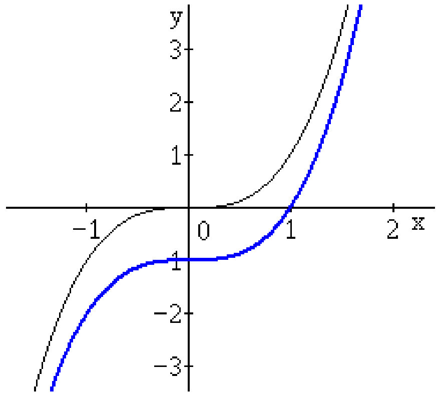
V této kapitole si vysvětlíme, jak se změní graf funkce, jestliže se částečně změní funkční předpis. Všechny změny původního grafu budou demonstrovány na mocninné funkci $y = x^3$, ale popsaná pravidla platí i pro všechny ostatní funkce (tenkou čarou budou kresleny základní grafy, silněji pak výsledné grafy).

Přičtení (odečtení) čísla k hodnotě funkce

Nechť je dáno reálné číslo c a funkce $y = f(x)$. Graf funkce $y = f(x) + c$ je množina bodů $[x, f(x) + c]$, kde $[x, f(x)]$ jsou body grafu funkce $f(x)$. Graf funkce $y = f(x) + c$ (případně $y = f(x) - c$) tedy dostaneme posunutím grafu zadané funkce $f(x)$ o c jednotek nahoru (dolů).



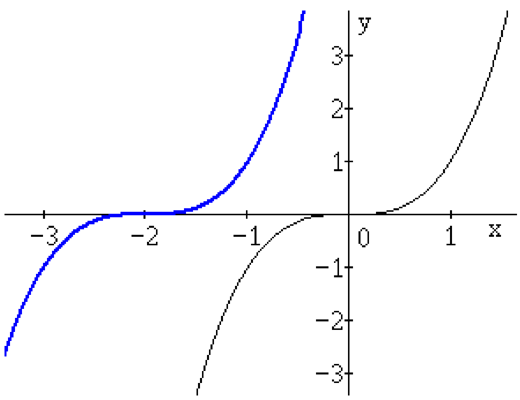
$y = x^3 + 2$



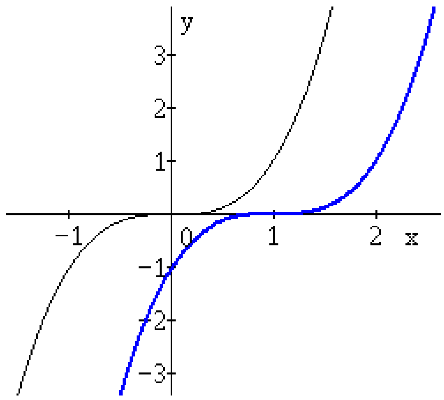
$y = x^3 - 1$

Přičtení (odečtení) čísla k argumentu funkce

Nechť je dáno reálné číslo c a funkce $y = f(x)$. Graf funkce $y = f(x+c)$ je množina bodů $[x-c, f(x)]$, kde $[x, f(x)]$ jsou body grafu funkce $f(x)$. Graf funkce $y = f(x+c)$ (případně $y = f(x-c)$) tedy dostaneme posunutím grafu zadané funkce $f(x)$ o c jednotek doleva (doprava).



$y = (x+2)^3$

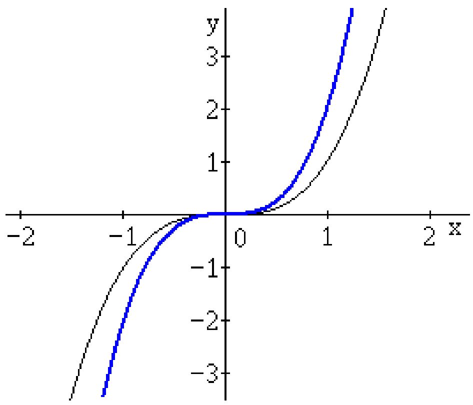


$y = (x-1)^3$

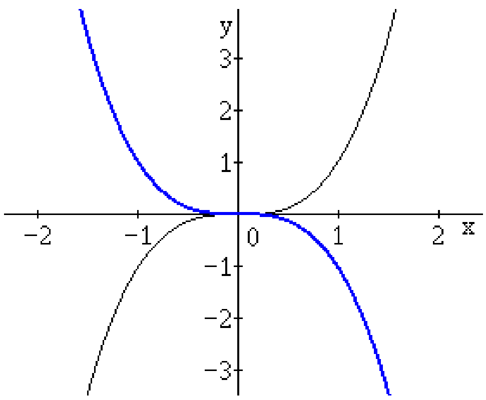
Vynásobení hodnoty funkce číslem

Nechť je dáno reálné číslo c a funkce $y = f(x)$. Graf funkce $y = c \cdot f(x)$ je množina bodů $[x, c.f(x)]$, kde $[x, f(x)]$ jsou body grafu funkce $f(x)$.

Druhá souřadnice bodů grafu funkce $c \cdot f(x)$ je tedy c-krát větší (je-li $c > 1$) nebo c-krát menší (je-li $c < 1$) než druhá souřadnice původního grafu. Graf funkce $y = -f(x)$ je souměrný s grafem funkce $y = f(x)$ podle osy x.



$y = 2x^3$

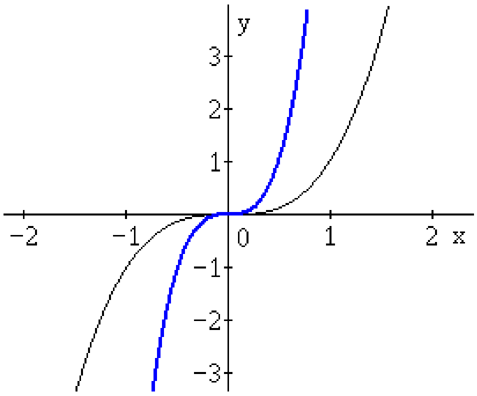


$y = -x^3$

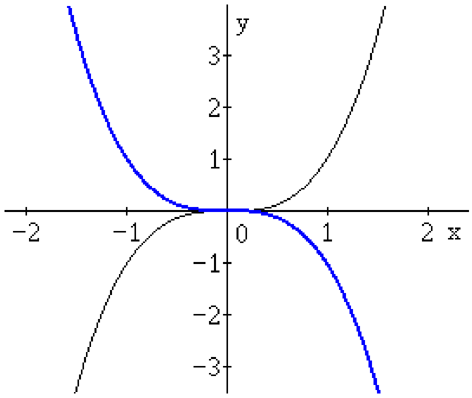
Vynásobení argumentu funkce číslem

Nechť je dáno reálné číslo c a funkce $y = f(x)$. Graf funkce $y = f(c.x)$ je množina bodů $\left[\frac{x}{c}, f(x)\right]$, kde $[x, f(x)]$ jsou body grafu funkce $f(x)$.

Graf funkce $y = f(-x)$ je souměrný s grafem funkce $y = f(x)$ podle osy *y*.



$y = (2x)^3$



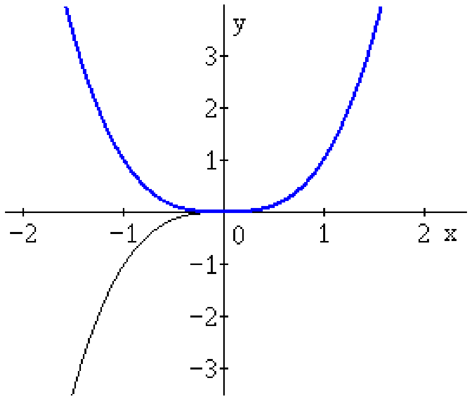
$y = (-x)^3$

Absolutní hodnota funkce

Připomeňme, že absolutní hodnotou čísla $x \in \mathbf{R}$ rozumíme nezáporné číslo, které značíme $|x|$, a které definujeme vztahy:

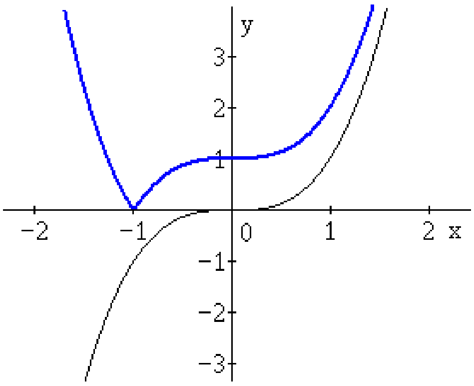
$$|x| = x \text{ pro } x \geq 0, \quad |x| = -x \text{ pro } x < 0.$$

Graf funkce $y = |f(x)|$ je množina bodů $[x, |f(x)|]$, kde $[x, f(x)]$ jsou body grafu funkce $f(x)$. Pro ta *x*, pro která je $f(x) \geq 0$, jsou grafy funkcí $f(x)$ a $|f(x)|$ shodné. Pro ta *x*, pro která je $f(x) < 0$, jsou grafy funkcí $f(x)$ a $|f(x)|$ souměrné podle osy *x*.

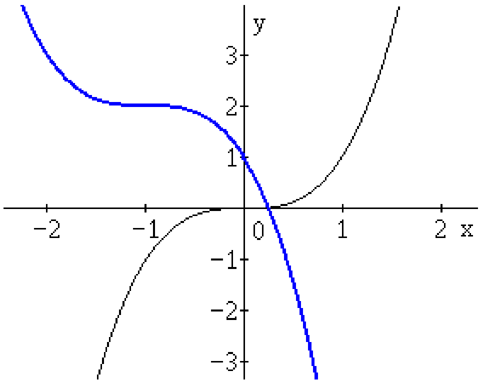


$y = |x^3|$

Při kombinaci více modifikací původního grafu musíme na tento graf postupně aplikovat všechna odpovídající pravidla.



$y = |(-x)^3 - 1|$



$y = 2 - (x+1)^3$

Příklad 2.5.

Načrtněte graf funkce a určete její průsečíky s osami souřadnic:

a) $f: y = \dfrac{1}{x-1} + 3$, b) $g: y = 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$, c) $h: y = 1 + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, d) $k: y = 2 - \sqrt{x+1}$,

e) $l: y = \log_{0,5}(1-x) - 2$.

Řešení: a) Graf funkce *f* vznikne posunutím grafu funkce $y = \dfrac{1}{x}$ o 1 jednotku doprava po ose *x* a o 3 jednotky nahoru po ose *y*.

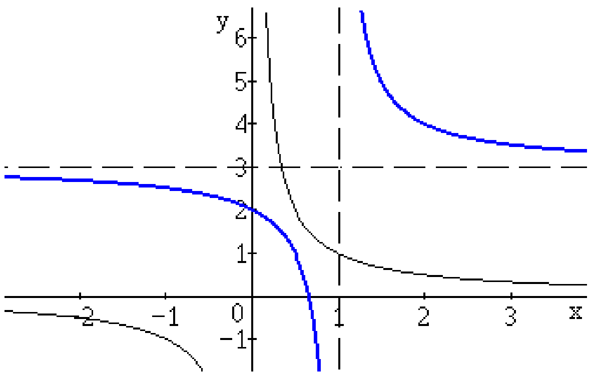
Definiční obor funkce $f: y = \dfrac{1}{x-1} + 3$ je množina $D(f) = \mathbf{R}/\{1\}$.

Nejprve vypočítáme průsečíky s osami souřadnic. Průsečík s osou *x* je bod o souřadnicích $[x, 0]$. Určíme ho dosazením nuly za *y* do rovnice funkce:

$0 = \dfrac{1}{x-1} + 3 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{2}{3}$. Tedy průsečík s osou *x* je bod $P_x = \left[\dfrac{2}{3}, 0\right]$.

Průsečík s osou *y* je bod o souřadnicích $[0, y]$. Určíme ho dosazením nuly za *x* do rovnice funkce: $y = \dfrac{1}{0-1} + 3 \;\Rightarrow\; y = 2$. Tedy průsečík s osou *y* je bod $P_y = [0, 2]$.

Graf funkce *f* :



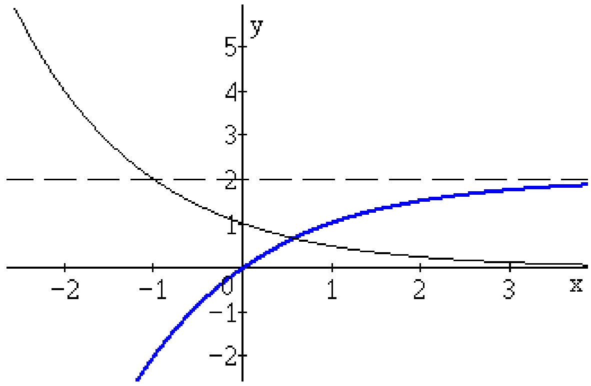
b) Graf funkce *g* vznikne posunutím grafu funkce $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$ o 1 jednotku doprava po ose *x*, otočením kolem osy *x* a posunutím o 2 jednotky nahoru po ose *y*.

Definiční obor funkce $g: y = 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$ je množina $D(g) = \mathbf{R}$.

Průsečík s osou $x: 0 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \Rightarrow 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \Rightarrow x = 0$.

Tedy průsečík s osou x je bod $P_x = [0, 0]$. Je zřejmé, že tento bod je zároveň průsečík s osou y (vzhledem k monotónnosti funkce je to jediný průsečík).

Graf funkce g:



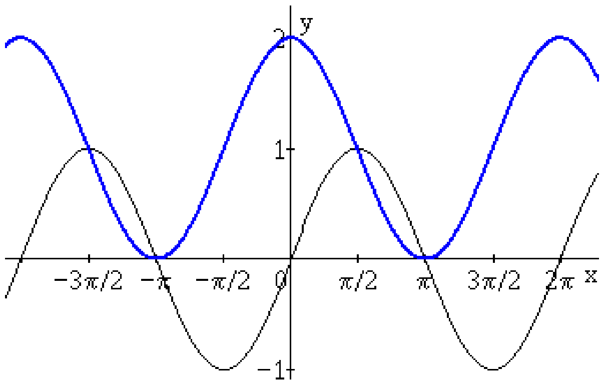
Poznámka: Pro přesnější kreslení grafů využíváme tzv. asymptoty. Jsou to přímky, ke kterým se graf funkce přibližuje. Například v poslední řešené úloze je to přímka $y = 2$. Asymptotami se budeme podrobněji zabývat ve 4. kapitole.

c) Graf funkce h vznikne posunutím grafu funkce $y = \sin x$ o $\frac{\pi}{2}$ doleva po ose x a o 1 jednotku nahoru po ose y. Definiční obor funkce h je množina $D(h) = \mathbf{R}$.

Průsečík s osou x: $0 = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = (2k+1)\cdot\pi,\ k \in \mathbf{Z}$. Tedy společných bodů s osou x je nekonečně mnoho a zapíšeme je ve tvaru $[(2k+1)\pi, 0],\ k \in \mathbf{Z}$.

Průsečík s osou y: $y = 1 + \sin\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = 2$. Tedy průsečík s osou y je bod $P_y = [0, 2]$.

Graf funkce h:

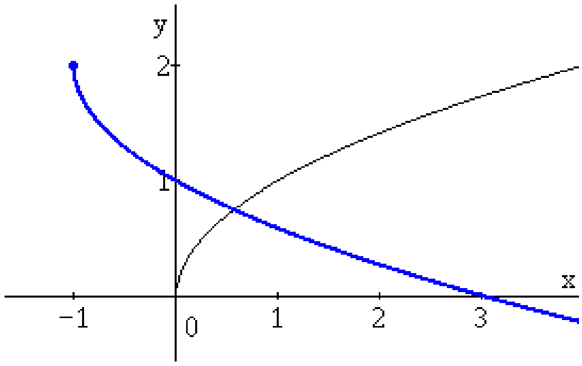


d) Graf funkce k vznikne posunutím grafu funkce $y = \sqrt{x}$ o 1 jednotku doleva po ose x, otočením kolem osy x a posunutím o 2 jednotky nahoru po ose y. Definiční obor funkce $k: y = 2 - \sqrt{x+1}$ je množina $D(k) = \langle -1, \infty)$.

Průsečík s osou x: $0 = 2 - \sqrt{x+1} \Rightarrow x = 3$. Tedy průsečík s osou x je bod $P_x = [3, 0]$.

Průsečík s osou y: $y = 2 - \sqrt{0+1} \Rightarrow y = 1$. Tedy průsečík s osou y je bod $P_y = [0, 1]$.

Graf funkce *k*:



e) Graf funkce *l* dostaneme posunutím funkce $y=\log_{0,5}(x)$ o 1 jednotku doleva (tak dostaneme graf funkce $\log_{0,5}(1+x)$), překlopením kolem osy *y* (tím dostaneme graf funkce $\log_{0,5}(1-x)$) a posunem o 2 jednotky dolů po ose *y*.

Definiční obor funkce *l* je množina $D(l)=(-\infty,1)$.

Průsečík s osou *x*:

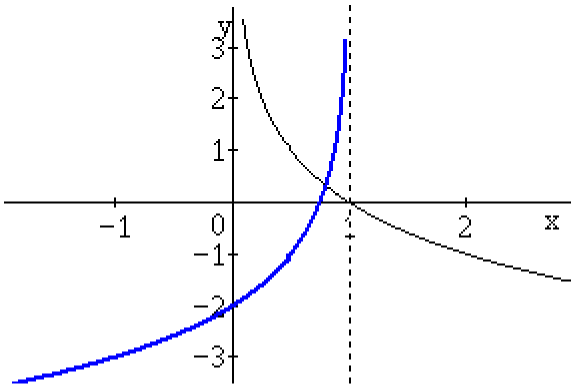
$$0=\log_{0,5}(1-x)-2 \Rightarrow 2=\log_{0,5}(1-x)\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-x\Rightarrow x=1-\frac{1}{4}\Rightarrow x=\frac{3}{4}.$$

Tedy průsečík s osou *x* je bod $P_x=\left[\frac{3}{4},0\right]$.

Průsečík s osou *y* dostaneme řešením rovnice : $y=\log_{0,5}(1-0)-2\Rightarrow y=-2$.

Tedy průsečík s osou *y* je bod $P_y=[0,-2]$.

Graf funkce *l*:



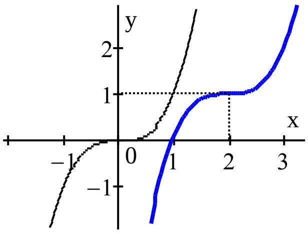
Jiný postup kreslení: Funkci *l* upravíme na tvar $l: y=\log_{0,5}[-(x-1)]-2$. Výsledný graf pak dostaneme posunutím funkce $y=\log_{0,5}(x)$ o 1 jednotku doprava (tak dostaneme graf funkce $\log_{0,5}(x-1)$), překlopením kolem osy *y* (tím dostaneme graf funkce $\log_{0,5}[-(x-1)]$) a posunem o 2 jednotky dolů po ose *y*.

Úlohy 2.9.

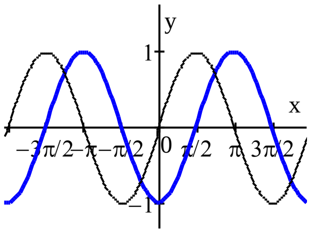
1. Sestrojte grafy funkcí: a) $y=(x-2)^3+1$, b) $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$, c) $y=1-\sqrt{x+1}$, d) $y=(x+1)^2-2$, e) $y=2-(1-x)^3$, f) $y=e^{x+1}-1$, g) $y=2\ln(x+3)-\mathrm{e}$, h) $y=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)+1$.

Výsledky úloh 2.9.

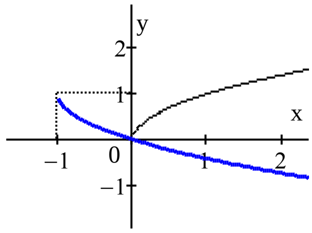
1. a)



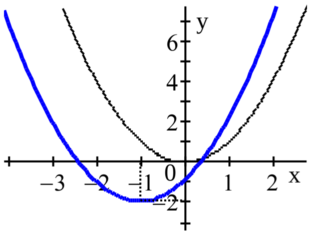
b)



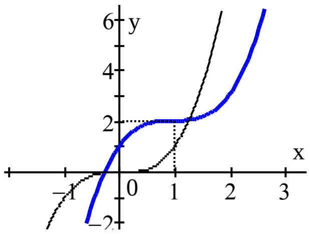
c)



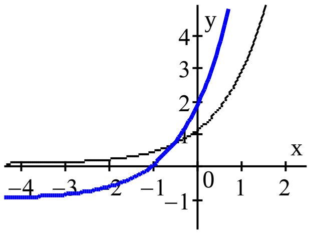
d)



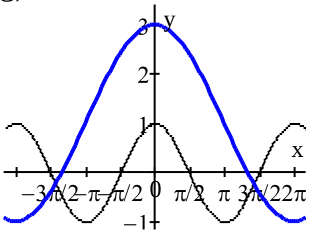
e)



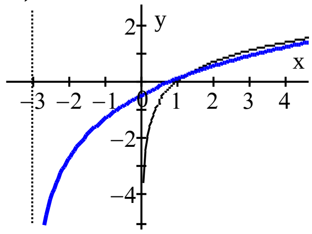
f)



g)



h)



Shrnutí kapitoly

Základní elementární funkce, jejich obory, vlastnosti a grafy.

Základní elementární funkce jsou funkce, se kterými se v praxi setkáváme nejčastěji. Jsou to funkce konstantní, mocninné, goniometrické, exponenciální, logaritmické a cyklometrické. Obory a vlastnosti těchto funkcí je možné určovat na základě jejich grafů.

Lineární a kvadratická funkce.

Elementární funkce jsou funkce, které byly vytvořeny pomocí algebraických operací sčítání, odečítání, násobení, dělení, umocňování a pomocí skládání ze základních elementárních funkcí. Nejjednodušším příkladem elementárních funkcí jsou lineární funkce $y = ax + b$ a kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$.

Vyšetřování definičních oborů složených elementárních funkcí.

Při vyšetřování definičních oborů složených funkcí vycházíme za znalostí základních elementárních funkcí a z podmínek, které musí splňovat jejich argumenty.

Kreslení grafů elementárních funkcí v posunutém tvaru.

Graf funkce $f(x)+c$ vznikne posunutím grafu funkce $f(x)$ o c jednotek nahoru. Graf funkce $c \cdot f(x)$ vznikne protažením grafu funkce $f(x)$ do výšky na c-násobek. Graf funkce $f(x+c)$ vznikne posunutím grafu funkce $f(x)$ o c jednotek doleva. Graf funkce $f(c \cdot x)$ vznikne c-násobným stažením grafu funkce $f(x)$ na šířku. Graf funkce $f^{-1}(x)$ vznikne překlopením grafu funkce $f(x)$ kolem přímky $y = x$.

Klíčové pojmy

- konstantní funkce,
- obecná mocnina,
- goniometrické funkce,
- exponenciální funkce,
- logaritmické funkce,
- cyklometrické funkce,
- lineární funkce,
- kvadratické funkce,
- základní elementární funkce,
- elementární funkce.

Samostatný test

A. Teoretická část

Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Existuje goniometrická funkce, která je sudá.
2. Všechny goniometrické funkce jsou periodické.
3. Každá exponenciální funkce $y = a^x$ je prostá.
4. Inverzní funkcí k funkci $y = \cos x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ je funkce $y = \arccos x$ na $\langle -1, 1 \rangle$.
5. Pro každá dvě reálná čísla $x < y$ platí: $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^y$.
6. Pro každá dvě reálná čísla $x > y$ platí: $2^x > 2^y$.
7. Logaritmická funkce je definovaná pro každé $x \in \mathbf{R}$.
8. Logaritmus čísla A o základu z je číslo B, pro které platí: $z^A = B$.
9. Exponenciální funkce $y = a^x$ je inverzní k funkci $y = \log_a x$.

B. Praktická část

1. Určete definiční obor funkce:

a) $y = \frac{x}{\ln(x-1)}$, b) $y = x \cdot e^{2x+1}$, c) $y = \frac{\ln \cos x}{\sqrt{9 - x^2}} \cdot \operatorname{cotg} \frac{x}{3}$, d) $y = \arcsin \frac{2x-3}{2}$,

e) $y = \log\left(x^2 - 10\right) + \sqrt{x^2 - 5x}$, f) $y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x-3}$.

2. Vyberte funkce, které jsou ve svém definičním oboru prosté:

a) $f: y = \log_2(x-2) + 1$, b) $g: y = x^2 - 5x + 6$, c) $h: y = \arccos(2x+3)$.

3. K funkcím *f*, *g*, *h* z příkladu 2. stanovte inverzní funkce a určete jejich definiční obory.

4. Sestrojte grafy funkcí: a) $y = \cos \frac{x}{2}$, b) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$, c) $y = \ln x + 1$.

5. Vypočítejte *x*, jestliže: a) $\log_{0,5} x = -\frac{3}{2}$, b) $\log_x \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

6. Zjistěte, zda funkce $f: y = \log \frac{1-x}{1+x}$ je sudá nebo lichá.

7. Nalezněte exponenciální funkci o rovnici $f: y = ka^x$, pro kterou platí $f(3) = 3$, $f(5) = \frac{3}{4}$.

8. Načrtněte graf kvadratické funkce a určete její obor hodnot:

a) $f: y = -x^2 - 6x - 9$, b) $g: y = x^2 - 3x + 0.25$.